

SUPERPOSICIÓN DE SINGULARIDADES PARA SIMULAR LA PRESENCIA DE CAVIDADES EN PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA USANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Ojeda^{1,4}, David; Divo², Eduardo; Kassab³, Alain; Cerrolaza⁴, Miguel

¹ Departamento de Diseño Mecánico y Automatización, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Nguanagua, Venezuela.

² Department of Engineering Technology, University of Central Florida, Orlando, FL, USA. ³ Dep. of Mechanical, Materials, and Aerospace Engineering, University of Central Florida, Orlando, FL, USA. ⁴ Instituto Nacional de Bioingeniería, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

Recibido: 28-11-2006

Resumen. Se presenta una solución eficiente usando una técnica de superposición de cargas puntuales en elastostática empleando el método de elementos de contorno. La superposición de un conjunto de cargas puntuales para simular la presencia de cavidades ofrece una ventaja en la reducción del tiempo computacional en problemas de elastostática; el uso del método de elementos de contorno optimiza el proceso ya que no se requiere re-discretizar el contorno. Se valida la solución en configuraciones geométricas regulares con cavidades simples a partir de resultados obtenidos a través de experimentos numéricos usando el Método de los Elementos de Contorno. **Palabras claves:** Método de elementos de contorno (MEC); Detección de cavidades; Superposición de singularidades; Elastostática.

SINGULAR SUPERPOSITION TECHNIQUE TO SIMULATE CAVITIES IN ELASTOSTATIC PROBLEMS USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

ABSTRACT. An efficient singular superposition technique in elastostatics boundary element methods for cavity detection using a point load is presented in this paper. The superposition of several concentrated loads to simulate the presence of cavities leads to a significant reduction of the computational time in the elastostatics field solution with the boundary element method since no boundary re-discretization is necessary throughout the optimization process. Results of cavity presence problems simulated using numerical experiments validate the approach in regular geometrical configurations with single cavities. **Key words:** Boundary element method (BEM); Cavity detection; Singular superposition; Elastostatic.

INTRODUCCIÓN

Se presenta en este artículo un método de superposición singular de cargas puntuales para la solución de problemas geométricos inversos que permite simular, de manera eficiente, la presencia de cavidades internas. La superposición de cargas puntuales como fuente/sumidero dentro del dominio es la alternativa que satisface las condiciones de Cauchy expuestas en la superficie. En un problema directo se especifica: (a) la ecuación que rige el campo variable, (b) las propiedades físicas, (c) las condiciones de contorno, (d) las condiciones iniciales y (e) la geometría del sistema; todo esto con el propósito de determinar el campo de variables que se obtienen de las entradas. Por el contrario en un problema inverso, se especifica: (1) parte de las condiciones anteriormente mencionadas de la (a) al (e) y (2) unas condiciones impuestas (conocida como la condición expuesta del contorno). La razón de resolver un problema inverso es encontrar alguna condición desconocida numerada de la (a) a la (e) en un problema directo. Normalmente las condiciones impuestas se obtienen de alguna medición interna del campo de variables a través de algún sensor ^{6,9,14} o, como el caso de esta publicación, por medio del resultado de un experimento numérico.

El propósito de un problema geométrico inverso es determinar la parte oculta o inaccesible de la geometría, usando alguna condición impuesta en el contorno sobre la porción expuesta. Este problema ha sido de gran importancia en aplicaciones térmicas y de mecánica de sólidos para la detección no destructiva de cavidades en regiones internas ^{7,9,10,13,14}. En aplicaciones térmicas, el método requiere condiciones impuestas en el contorno,

por ejemplo, calor o temperatura⁶. En aplicaciones de elastostática, las condiciones impuestas son dadas en términos de desplazamientos y tracciones en la superficie. Generalmente, las tracciones en la superficie son conocidas por las condiciones de contorno, mientras que los desplazamientos son determinados experimentalmente a través de mediciones ^{9,14}. En esta investigación se usa una simulación numérica experimental para validar la aproximación a cavidades regulares e irregulares en geometrías simples.

El método de los elementos de contorno (MEC), por su propia naturaleza, ofrece la alternativa perfecta ^{1-3,5,6,9,11,12,14}, para la resolución de este tipo de problemas debido a que no requiere discretización del dominio ni regeneración completa del mallado así como la de su geometría ^{4,8}.

En este artículo se determinaron las características de las cavidades encontradas en una placa, mediante el desarrollo de un método de superposición a manera de generar una solución eficiente de los problemas geométricos que servirán para la detección de cavidades. La utilización de resultados numéricos de un problema en 2D con cavidad usando MEC ofrece una alternativa para validar el programa.

PROBLEMA DIRECTO Y MEC EN ELASTICIDAD

La solución de problemas directos en elastostática provee el campo de los desplazamientos dentro del sistema de ecuaciones de gobierno, las condiciones de contorno y el sistema geométrico. El campo de los desplazamientos para un medio isótropo, homogéneo y linealmente elástico sujeto a una distribución de fuerzas internas o de campo b_i es regida por la ecuación de Navier:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\frac{\mu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + b_i = 0 \quad (1)$$

donde u_i y u_j representan los campos de desplazamientos, ν es la relación de Poisson y μ es el módulo de rigidez.

En un problema directo, la solución de esta ecuación, normalmente, es posible cuando se prescriben correctamente dos posibles tipos de condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u_i &= k_i \text{ en } \Gamma_u \\ t_i &= s_j n_j = \bar{t}_i \text{ en } \Gamma_t \end{aligned} \quad (2)$$

donde, la sobrebarra denota una cantidad especificada, t_i es el campo de tracciones y n_j es el vector normal unitario hacia afuera del dominio Ω rodeado por el contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. El campo de esfuerzos σ_{ij} está definido como:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (3)$$

Con el campo de deformaciones relativas e_{ij} como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

Finalmente, en una formulación del método de elementos de contorno basada en la ecuación integral de Somigliana, queda planteada una relación integral entre la deformación u_i^p en un punto de colocación " p " y las deformaciones u_j y tracciones t_i en todo el contorno Γ . Adicionalmente, las fuerzas de campo b_i permanecen relacionadas a través de una integral de dominio Ω , como sigue:

$$c_{ij}^p u_i^p + \int_{\Gamma} H_{ij} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} G_{ij} t_i d\Gamma + \int_{\Omega} G_{ij} b_i d\Omega \quad (5)$$

donde, G_{ij} y H_{ij} son las soluciones fundamentales de desplazamientos y tracciones, respectivamente, y c_{ij}^p es una constante geométrica, tal que: $c_{ij}^p = 1$ si $p \in \Omega$; $c_{ij}^p = 0$ si $p \notin \Omega$ y $c_{ij}^p = 1/2$ si $p \in \Gamma$ en el caso de un contorno suave¹³.

Estableciendo que el campo de fuerzas internas b_i está constituido únicamente por cargas puntuales, tal que:

$$b_i = \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l \delta(x_i, x_i^l) \quad (6)$$

donde NL es el número de cargas puntuales, Q_i^l es la intensidad de cada carga l y $\delta(x_i, x_i^l)$ es la función de Dirac ubicada en el punto de impacto de cada carga x_i^l . Utilizando las propiedades de la función de Dirac, el último término de la ecuación integral (5) se reduce a:

$$\int_{\Omega} G_{ij} b_i d\Omega = \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l \int_{\Omega} G_{ij} \delta(x_i, x_i^l) d\Omega = \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l G_{ij}^l \quad (7)$$

donde G_{ij}^l es la solución fundamental de desplazamiento evaluada en el punto de impacto de cada carga x^l . Esta substitución permite reducir, de manera simple, la ecuación integral (7) a integrales de contorno como:

$$c_{ij}^p u_i^p + \int_{\Gamma} H_{ij} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} G_{ij} t_i d\Gamma + \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l G_{ij}^l \quad (8)$$

De igual forma se puede definir una ecuación integral de contorno que relaciona el campo de esfuerzos σ_{ik}^p en un punto de colocación p como:

$$c_{ij}^p \sigma_{ik}^p + \int_{\Gamma} S_{ijk} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{ijk} t_i d\Gamma + \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l D_{ijk}^l \quad (9)$$

donde los términos S_{ijk} y D_{ijk} son las soluciones fundamentales de esfuerzos. Esta ecuación integral de contorno se puede emplear para calcular el esfuerzo σ_{ik}^p en cualquier punto p del dominio W e incluso se puede llevar al contorno pero se deben utilizar métodos especiales de integración ya que el término S_{ijk} se vuelve hipersingular cuando se integra sobre el punto de colocación p .

Discretizando la ecuación integral de contorno de desplazamientos (9) utilizando NE elementos de contorno con NV nodos independientes en cada elemento, se obtiene el siguiente arreglo matricial:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} + \{q\} \quad (10)$$

donde las matrices $[H]$ y $[G]$, de dimensiones $N \times N$, contienen los coeficientes de influencia que relacionan los desplazamientos $\{u\}$ y tracciones $\{t\}$ en el contorno. $N = d \times NE$, d es el número de dimensiones espaciales (2 o 3). Lo más resaltante de este desarrollo es el hecho que todos los efectos generados por las cargas puntuales quedan remitidos al vector $\{q\}$, lo que esencialmente permite alegar que si de alguna forma se logra simular la presencia de una cavidad utilizando un conjunto de cargas puntuales, entonces no se necesitaría re-discretizar el contorno en cada paso de un eventual proceso de optimización para la detección de esta cavidad ya que su efecto simplemente estaría afectando al sistema algebraico con la suma de un vector $\{q\}$ conocido.

A la relación de coeficientes (10) se introducen las condiciones de borde \bar{u}_i y \bar{t}_i para arreglar el sistema algebraico en la forma:

$$[A]\{x\} = \{b\} + \{q\} \quad (11)$$

donde el vector $\{x\}$ contiene los valores nodales desconocidos de $\{u\}$ y $\{t\}$ en donde no fueron prescritas condiciones de borde. La solución de este sistema sigue métodos estándar. Cabe destacar que para esta investigación se emplearon solo elementos de contorno cuadráticos discontinuos iso-paramétricos, donde tanto la geometría como las cantidades de campo $\{u\}$ y $\{t\}$ son aproximadas utilizando funciones de forma cuadráticas

pero los nodos de las cantidades de campo se ubican dentro del elemento (12,5%)^{6,7} y no en los puntos extremos del elemento como es el caso de los nodos geométricos. Una de las ventajas para el uso de este tipo de nodo es evitar las singularidades en las esquinas⁴.

SIMULACIÓN DE CAVIDADES CON ARREGLOS DE CARGAS PUNTUALES

En problemas de potenciales, flujo ideal de fluidos, conducción de calor y electrostática, la superposición de una fuente y un sumidero de cargas iguales ubicados a una distancia L en dirección paralela a un flujo prescrito, da origen a líneas de isoflujo y en particular a una donde el flujo normal se desvanece. Esta línea de cero flujo normal puede ser interpretada como la presencia de una superficie sólida o como el contorno artificial de una cavidad elíptica⁶. Ver figura 1.

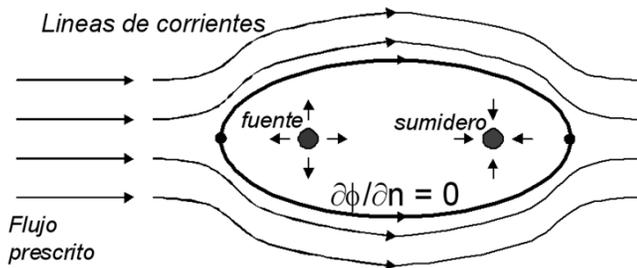


Figura 1. Simulación de una superficie elíptica al paso de un flujo paralelo por superposición de singularidades.

Esta misma afirmación puede hacerse en campos elastostáticos donde la interpretación se traduce a la superposición de dos cargas puntuales, en dirección paralela al flujo de energía elástica de deformación, de intensidades iguales (fuentes) y opuestas (sumideros). En este caso pudiera inferirse que en algún contorno artificial alrededor de estas cargas, existe una línea donde las tracciones se desvanecen la cual se pudiera interpretar como la superficie hipotética de una cavidad elíptica. Mas aún, si se consideran flujos de energía elástica de deformaciones no paralelos y se añaden más cargas puntuales en un arreglo geométrico preestablecido, se pudiera realizar la simulación de cavidades de geometría irregular y orientación variable, tal como se observa en la figura 2.

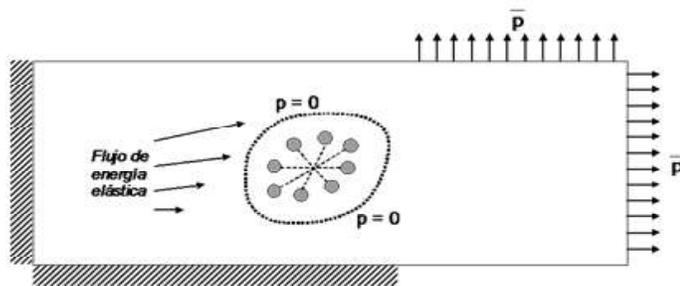
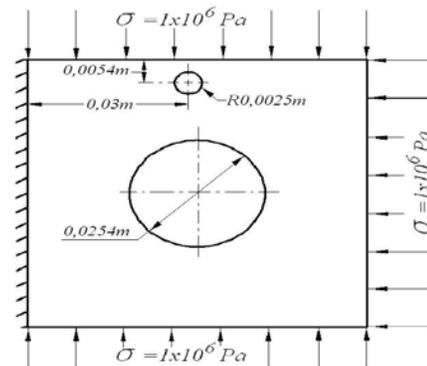


Figura 2. Arreglo geométrico de cargas puntuales al paso de un flujo de energía elástica no paralelo

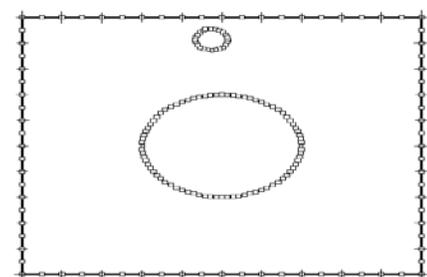
VALIDACIÓN NUMÉRICA

Los resultados numéricos de problemas directos en 2D con cavidades usando MEC ofrecen una alternativa para generar las condiciones de contorno en el exterior de la superficie que servirá para validar el programa. Se usan elementos de contorno discontinuos y cuadráticos en todos los casos.

La figura 3.a muestra el ejemplo 1, una placa de sección cuadrada de $0,0635 \times 0,0635 \text{ m}^2$ con un agujero centrado de diámetro circular de $0,0254 \text{ m}$ y una cavidad de diámetro $0,005 \text{ m}$. La placa está empotrada en uno de los lados y tiene una carga de compresión de 10^6 Pa distribuida en el resto de los lados. En la figura 3.b se observa la discretización de la placa con 80 elementos (40 en los lados y 40 para el agujero). Un ejemplo 2 es mostrado en la figura 4.a, similar al ejemplo 1, es una placa de sección cuadrada de $0,0635 \times 0,0635 \text{ m}^2$ con un agujero centrado de diámetro circular de $0,0254 \text{ m}$ y una cavidad de diámetro $0,00674 \text{ m}$, empotrada en uno de los lados y tiene una carga de compresión de 10^6 Pa distribuida en el resto de los lados. En la figura 4.b se muestra la discretización de la placa con 80 elementos (40 en los lados y 40 para el agujero). En la figura 5.a se muestra un tercer ejemplo de una barra empotrada de $0,25 \times 0,05 \text{ m}^2$ sometida a una carga de tracción pura de $2 \times 10^6 \text{ Pa}$ distribuida en el lado opuesto al empotramiento, con una cavidad de diámetro $0,02 \text{ m}$ y discretizada con 120 elementos sin incluir la cavidad (ver figura 5.b). Las figuras 12, 13 y 14 muestran los desplazamientos y el esfuerzo de von Mises de los 3 ejemplos usando problemas directos y MEC, que serán usados para validar el proceso de simulación.



(a) Ejemplo 1. Cavidad de $\varnothing 0,005 \text{ m}$



(b) Discretización del ejemplo 1

Figura 3. Condiciones de contorno y discretización del ejemplo 1.

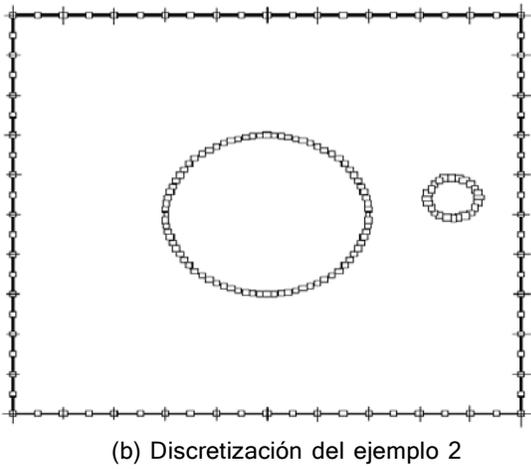
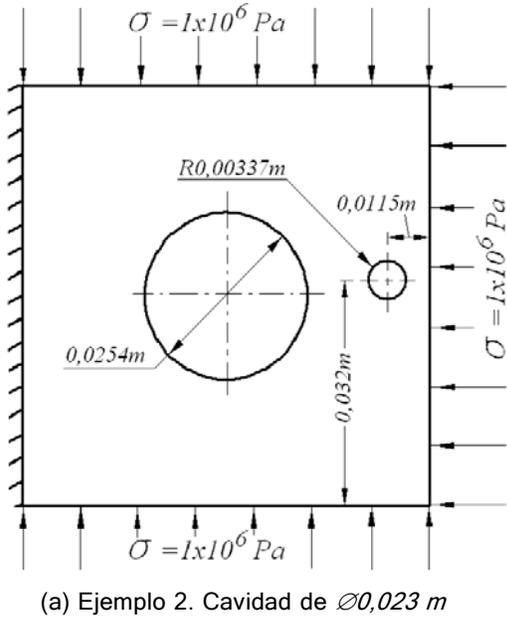


Figura 4. Condiciones de contorno y discretización del ejemplo 2.

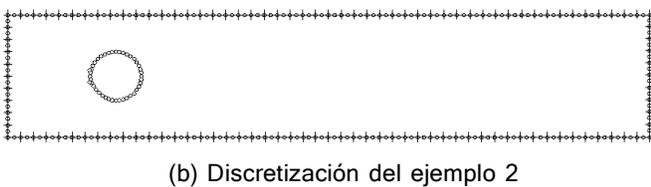
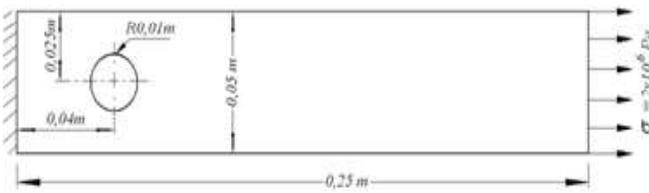


Figura 5. Condiciones de contorno para la barra sometida a tracción.

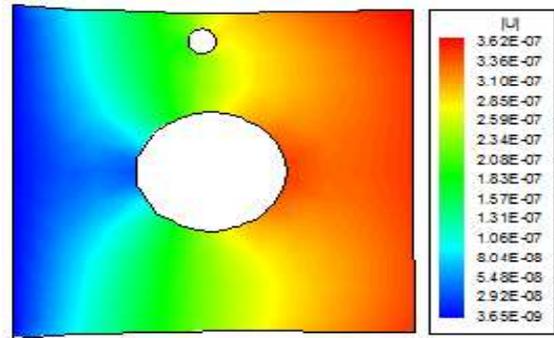
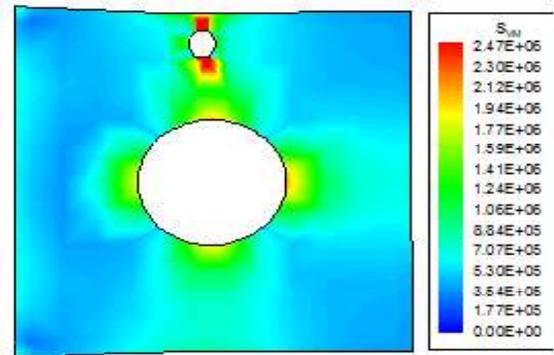


Figura 6. Resultado numérico directo aplicando MEC en el ejemplo 2.

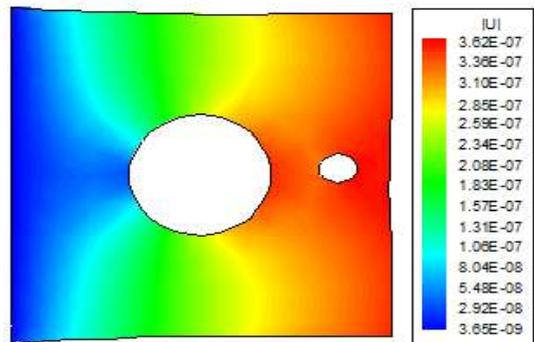
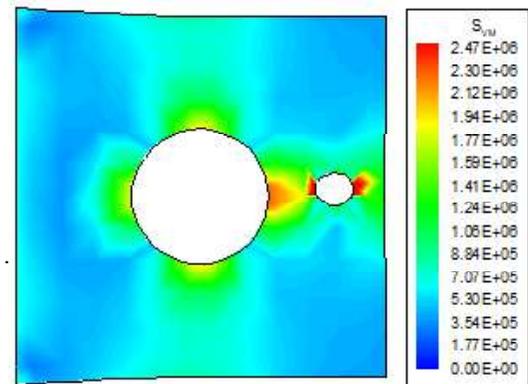


Figura 7. Resultado numérico directo aplicando MEC en el ejemplo 2.

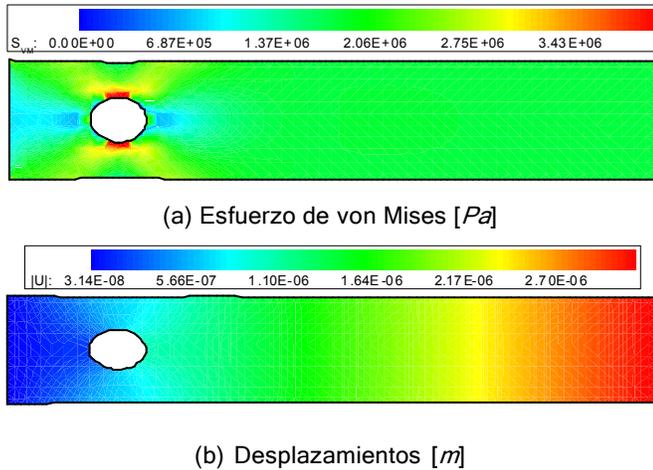


Figura 8. Resultado numérico directo aplicando MEC en el ejemplo 3.

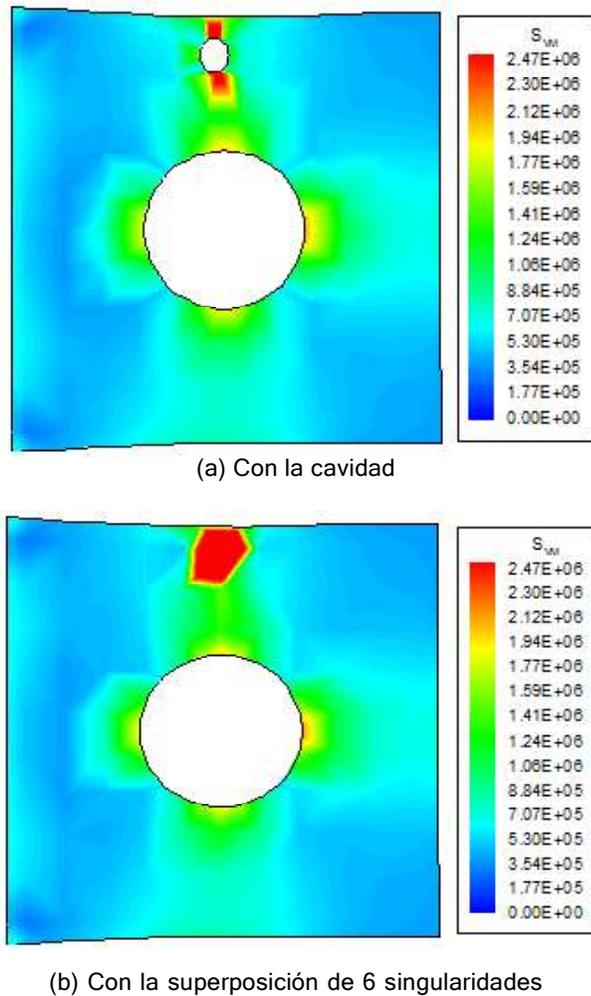


Figura 9. Comparación del Esfuerzo de von Mises [Pa] para el ejemplo 1.

Se toman los modelos de los ejemplos del 1 al 3; pero, sin la presencia de la cavidad. Se superponen 6 cargas puntuales, como lo indicado en las figuras 1 y 2, con di-

rección paralela al flujo de energía elástica de deformación intensidades iguales (fuentes) y opuestas (sumideros) ubicadas en la posición geométrica de la cavidad según las figuras 3, 4 y 5. Se resuelve el problema directo usando el MEC y se obtiene el esfuerzo de von Mises y deformación para cada ejemplo. Las figuras 9, 10 y 11 muestran la comparación del esfuerzo de von Mises para los ejemplos 1, 2 y 3. La misma comparación se muestra con los desplazamientos para los mismos ejemplos en las figuras 12, 13 y 14.

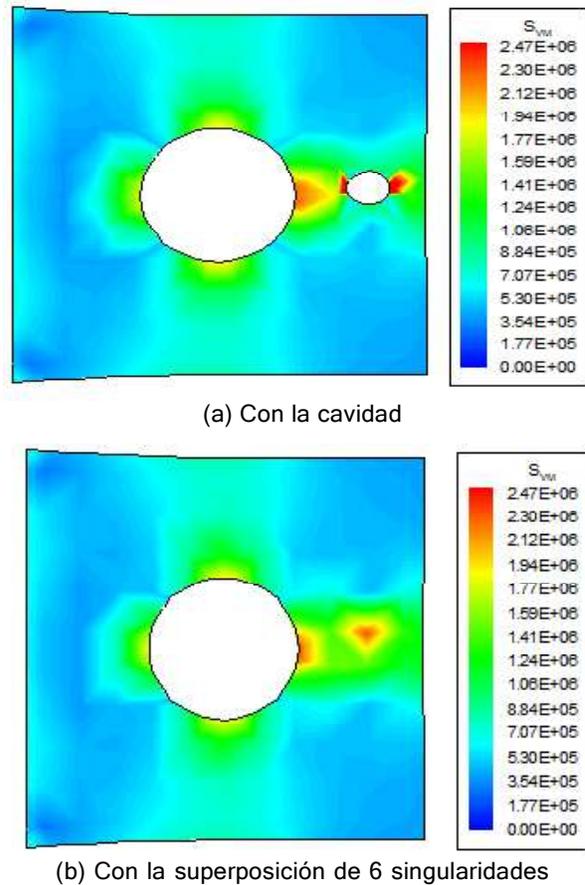


Figura 10. Comparación del Esfuerzo de von Mises [Pa] para el ejemplo 2.

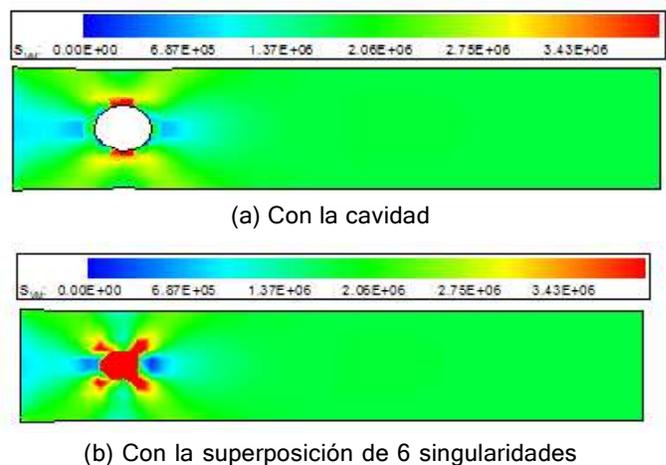
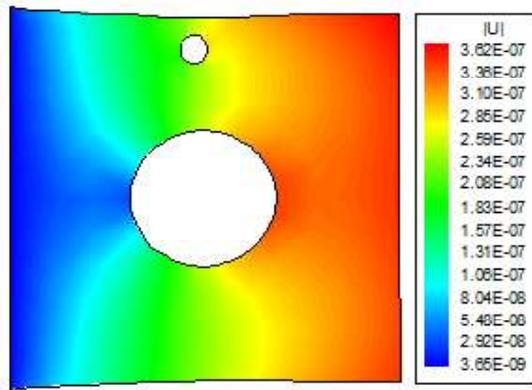
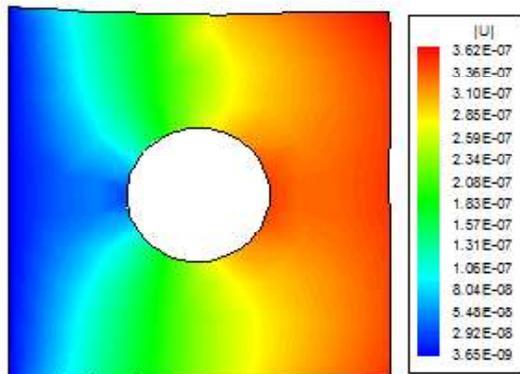


Figura 11. Comparación del Esfuerzo de von Mises [Pa] para el ejemplo 3

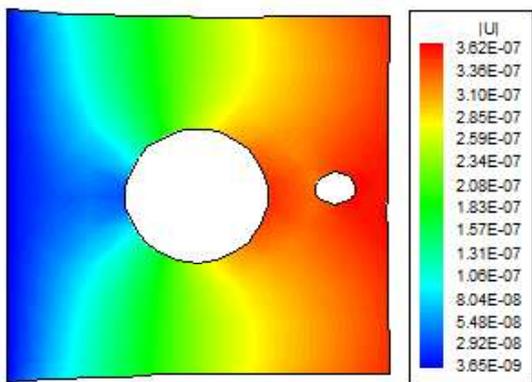


(a) Con la cavidad

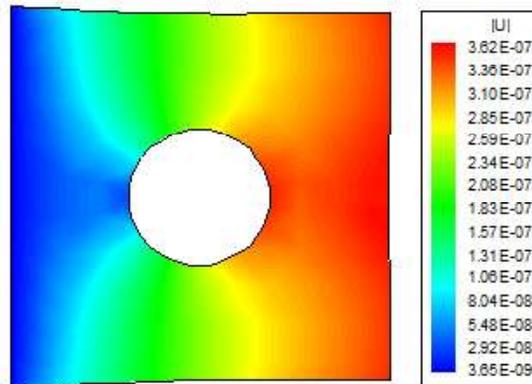


(b) Con la superposición de 6 singularidades

Figura 12. Comparación de la deformación $[m]$ para el ejemplo 1

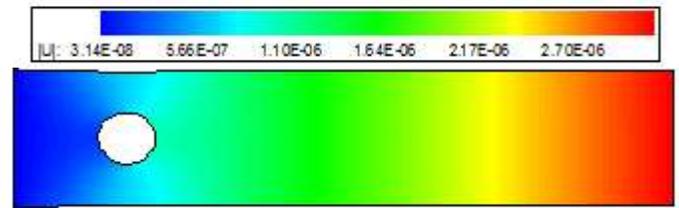


(a) Con la cavidad



(b) Con la superposición de 6 singularidades

Figura 13. Comparación de la deformación $[m]$ para el ejemplo 2.



(a) Con la cavidad



(b) Con la superposición de 6 singularidades

Figura 14. Comparación de la deformación $[m]$ para el ejemplo 3.

CONCLUSIONES

Se presenta un método satisfactorio para resolver problemas geométricos inversos a partir de una técnica de superposición de cargas puntuales en elastostática empleando el método de elementos de contorno. Se validó la solución en configuraciones geométricas regulares con cavidades simples a partir de resultados obtenidos a través de experimentos numéricos usando el Método de los Elementos de Contorno.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su más sincero agradecimiento a la Universidad de Carabobo (Venezuela), University of Central Florida (USA) y Fonacit (Venezuela) por el financiamiento y apoyo institucional para el desarrollo de esta investigación.

REFERENCIAS

1. Annicchiarico W., Cerrolaza M., "An Evolutionary Approach for the Shape Optimization of General Boundary Elements Models". *Electronic Journal of Boundary Elements*, Vol.2, 2002.
2. Annicchiarico W., Cerrolaza M., "A 3D boundary element optimization approach based on genetic algorithms and surface modelling", *Eng. Anal. With Bound. Elem.*, **28**:1351-1361. 2004
3. Annicchiarico W., Martínez G., Cerrolaza M., "Boundary elements and b-spline modelling for medical applications", *J. of App. Math. Mod.*, 2005.
4. Brebbia C.A., Dominguez J., "Boundary element, An introductory course". *Computational mechanics Publ.*, pp. 134-250, Boston, co-published with McGraw-Hill, New York, 1989.
5. Cerrolaza M., Annicchiarico W., Martínez M., "Optimization of 2D boundary element models using b-splines and genetic algorithms", *Engineering Anal. with Bound. Elem.*, **24**: 427-440. 2000.

6. **Divo E.A., Kassab A.J., Rodríguez F.**, «An efficient singular superposition technique for cavity detection and shape optimization». *Numerical Heat Transfer, Part B*, **46**: 1 - 30, 2004.
7. **Divo E.A., Kassab A.J., Rodríguez F.**, "Characterization of space dependent thermal conductivity with a BEM-Based genetic algorithm. Institute for Computational Engineering", University of Central Florida, Orlando, Florida, 32816-2450, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **37**: 845 - 877. 2000.
8. **Kane J.H.** "Boundary element analysis in engineering continuum mechanics". *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1994.
9. **Kassab A.J., Moslehy F.A., Daryapurkar A.B.**, "Nondestructive detection of cavities by an inverse elastostatics boundary element method". *J. Engineering Analysis with Boundary Elements* **13**: 45 - 55. 1994.
10. **Kassab A.J., Moslehy F.A., Ulrich T.W.**, "Inverse boundary element solution for locating subsurface cavities in thermal and elastostatic problems". *In Proc. IABEM-95, Computational Mechanics '95, Hawaii, July 30-August 3 (ed. Atluri, Yagawa and Cruse)*, pp. 3024-3029, Springer, Berlin. 1995.
11. **Martínez G., Cerrolaza M.**, "A bone adaptation integrated approach using BEM", *J. Eng. Anal. With Bound. Elem.*, **30**: 107-115. 2006.
12. **Müller-Karger C., González C., Aliabadi M.H., Cerrolaza M.**, "Three dimensional BEM and FEM stress analysis of the human tibia under pathological conditions", *J. of Comp. Mod. In Eng. and Sciences*, **2**: 1-13. 2001.
13. **Rus G., Gallego R.**, "Boundary integral equation for inclusion and cavity shape sensitivity in harmonic elastodynamics". *J. Engineering Analysis with Boundary Elements* **29**: 77 - 91. 2005
14. **Ulrich T.W., Moslehy F.A., Kassab A.J.**, «A BEM based pattern search solution for a class of inverse elastostatic problems». *Int. J. Solids Structures*, **33**: 2123-2131, 1996.

Correspondencia: David Ojeda, Departamento de Diseño Mecánico y Automatización, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Naguanagua, Venezuela..
Correo electrónico: dojeda@uc.edu.ve